

# Auch der Weg der geodätischen Erkenntnis ist mit Unsicherheit gepflastert

Weltbilder entstehen, vergehen, werden erdacht, postuliert, verifiziert oder falsifiziert. Theoretische, praktische, allgemeine oder wissenschaftliche Erkenntnisse sind der Stoff aus dem sie geformt werden. Messwissenschaften oder Religionslehren fiel die Urteilsprechung über Bestand oder Zerriss von Weltbildern zu. Die Geodäsie spielte schon im Altertum einen wichtigen Part bei der Erkenntnisgewinnung und ohne vor Fehlinterpretationen und Trugschlüssen gefeit zu sein, zu deren Erkennung und Vermeidung sie Sensorien und das nötige Instrumentarium entwickelte und bereitstellt.

*Des visions du monde naissent, disparaissent, sont imaginées, postulées, vérifiées ou falsifiées. Les connaissances théoriques, pratiques, générales ou scientifiques sont la matière dont elles sont formées. Il incombaît aux sciences exactes ou aux doctrines religieuses de juger du maintien ou de l'anéantissement des visions du monde. La géodésie, déjà dans l'antiquité, a contribué pour une part importante à l'acquisition des connaissances sans pour autant être à l'abri de fausses interprétations voire de conclusions erronées; afin de les détecter et de les éviter elle a développé et mis à disposition des senseurs et les instruments nécessaires.*

Le immagini del Pianeta sono realizzate, superate, escogitate, postulate, verificate o falsificate. Le cognizioni teoriche, pratiche, generali o scientifiche dipendono dalla materia da cui sono forgiate. È toccato alla scienza delle misurazioni o alla dottrina delle religioni fornire un giudizio sulla consistenza o sull'inconsistenza di tali immagini. Già nell'Antichità, la geodesia ha svolto un importante ruolo nell'acquisizione delle conoscenze, ma non è rimasta al riparo da interpretazioni errate e conclusioni ingannevoli. Per evitare di cadere nuovamente in tale trappola ha sviluppato e messo a disposizione i relativi strumenti.

A. Geiger

## Die Falle stillschweigender Annahmen

Wie gross ist denn die Unsicherheit an der Summe zweier Zufallszahlen? Genau, Bienaimé hat die Frage für uns beantwortet und gab die Wurzel aus der Summe der Sigma-Quadrat Werte als Antwort.

$$z = x + y \text{ und } \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Sind die Unsicherheiten an x und y gleich, sagen wir  $\sigma$ , so resultiert die gängige Formel:  $\sigma_z = \sqrt{2} \cdot \sigma$ . Zähle ich also zwei Teilstrecken von einem Meter mit je einer Unsicherheit von 10 mm zusammen, ergibt sich ein 2 m Stück mit 14 mm Unsi-

cherheit. Eine elegantere Rechenweise ist die Multiplikation. Bei zwei 1 m-Stücken schreibe ich einfach  $z = 2 \cdot x = 2 \text{ m}$  und die Unsicherheit ergibt sich zu:  $\sigma_z = 2 \cdot \sigma = 20 \text{ mm}$ .

Also 2 m mit einer Unsicherheit von 20 mm. Das Ergebnis ist perfekt das gleiche bis auf die Unsicherheit, die so unsicher auch wieder nicht sein sollte. Stimmt nun 14 mm oder 20 mm?

Haben wir etwa einen Widerspruch entdeckt, den Gauss übersehen haben könnte?

Eine völlig rhetorische Frage, sie merken es. Sie wissen auch, dass wir mit der «eleganteren» Rechenweise in eine «Korrelationsfalle» getappt sind. Zähle ich zwei gleiche Zahlenwerte zusammen, deren Unsicherheiten nichts miteinander zu tun

haben, sind sie eben unkorreliert. Bei der Multiplikation haben wir stillschweigend vorausgesetzt, die beiden Zahlen seien identisch;  $x = y$ .

Was sehr einleuchtend ist aber damit sagt man auch, dass die Unsicherheiten identisch sind, da x ja die identische Variable zu y ist. Die Unsicherheiten müssen also mit r korreliert sein. In dem Fall ist die Korrelation gar 1.

Schreiben wir dies in der nicht allerseits beliebten Matrixformulierung, so löst sich der Widerspruch in mathematischem Wohlklang auf:

$$z = x + y = \mathbf{F} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{C}_{uu} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & r\sigma_x\sigma_y \\ r\sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

mit der «modernen», kompakten Schreibweise  $\mathbf{z} = \mathbf{F} \mathbf{u}$  und  $\mathbf{C}_{zz} = \mathbf{F} \mathbf{C}_{uu} \mathbf{F}^T$  wird

$$\sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & r\sigma_x\sigma_y \\ r\sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \sigma^2 (1 + r)$$

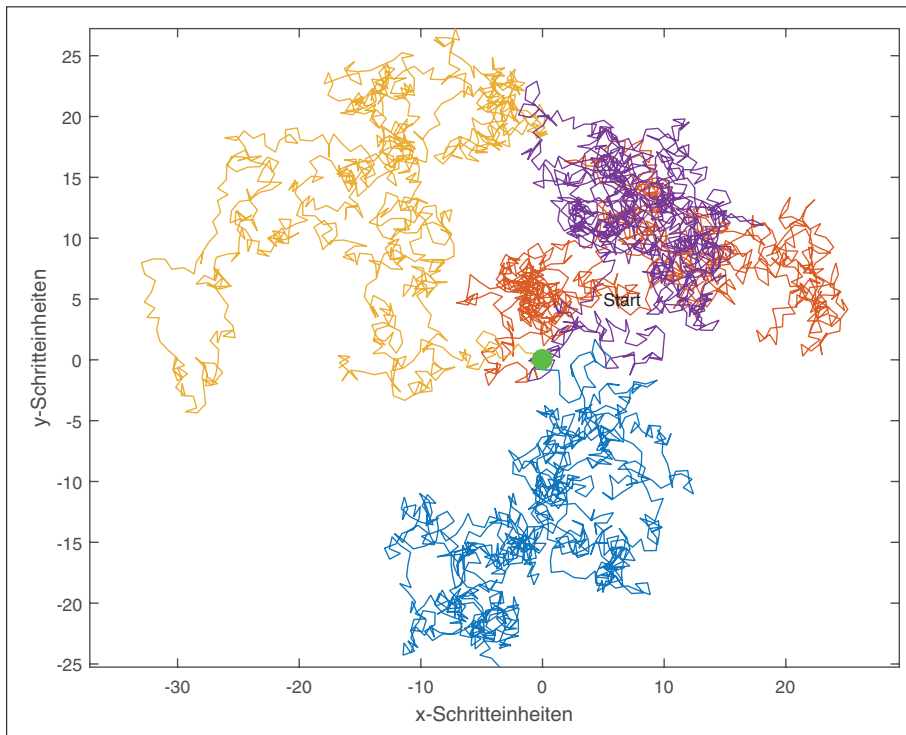
Darin ist einfachheitshalber berücksichtigt, dass  $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$  gelten soll. Und mit den zwei Unterscheidungen «unkorreliert» ( $r = 0$ ) und «vollkorreliert» ( $r=1$ ) ergeben sich die beiden Lösungen

$$\sigma_z = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \cdot \sigma \\ 2 \cdot \sigma \end{array} \right\}$$

Dieses einfache Beispiel soll zeigen, dass Korrelationen durchaus in Rechnungen gebraucht werden können und nicht zu Wortklaubereien verkommen müssen.

## Die Absicht, die keine ist

Spannend wird es beim Versuch, aus rein statistischen aber korrelierten Daten Systematiken ableiten zu wollen. In dem Zusammenhang kann das anschauliche Beispiel des orientierungslosen Trunkenbolds zitiert werden, der immerzu Schritte in jeweils völlig arbiträre Richtungen aneinander reiht. Die Frage darf nun gestellt werden, wo der Mann nach 1000 Schritten landet. Einfachheitshalber nehme man an, alle Schritte seien gleich lang, die Richtung jedoch werde völlig zufällig gewählt. Da die Richtungswahl zufällig erfolgt, läge es nahe anzunehmen, dass zu jeder Richtung auch eine Gegenrichtung vorläge, was «im Mittel» zu Null führen müsste. Das hiesse, der Mann bliebe mehr oder weniger am



**Abb. 1: Random walk. Vier Realisierungen (vier verschiedene Farben) mit gleicher Statistik und Start am grünen Punkt (1000 Schritte).**

Startort. Abb. 1 zeigt, dass dem nicht so ist und dass auch ein Orientierungsloser irgendwohin kommt.

Allerdings trügt der Schein. Wartet man genügend lange, wird sich der Startpunkt als wahrscheinlichster Aufenthaltsort herauschälen. Der Erwartungswert ist eben doch bei Null. Und trotzdem, beim Betrachten der Figur möchte man meinen, jedes Individuum verfolge doch einen gewissen Weg. Der Eindruck möchte entstehen, der Mann habe ein Ziel oder wenigstens eine «Drift». Nichts von dem. Die vermeintliche «Drift» kommt allein durch die Summation der völlig zufälligen Richtungen zustande. Oder man könnte auch sagen, die Summation von zufälligen Unsicherheiten führt zu einer Drift, die so nicht interpretiert werden kann. Bekannt sind Winkelgeschwindigkeitsensoren, die eine «Drift haben», was aber streng genommen lediglich vom eigentlichen Rauschen (unkorrelierte Unsicherheit) des Sensors stammt. Erst die Aufsummierung oder Integration des Rauschens führt zur Drift. Zur Verwirrung der Navigations satellitennutzer generierte die vor 2000 noch aktive Selective

Availability genau solche Muster in der Positionierungslösung, die bei Navigationsanwendungen schwierig herauszufiltern waren. Korrekturansätze mit autoregressiven Prozessen halfen teilweise. Für das Verhalten einer zufälligen Datenreihe hat Pearson um 1905 den Begriff «Random Walk» geprägt, eine recht zutreffende Bezeichnung, die personifizierende Züge annimmt, besonders, wenn von Eigenschaften wie «ziellos» gesprochen wird. In diese Richtung sei mir ein kleiner Exkurs gestattet.

Der wandernde Punkt soll den Zustand oder das Befinden einer Person beschreiben. Zwei Koordinaten sind da selbstredend wohl viel zu wenig, um die Multidimensionalität einer Person abzubilden. Die Zweidimensionalität ist einfach der Lesbarkeit zuliebe gewählt. Jede Person wird eine Zeitreihe generieren, die aufgetragen sich wie ein «Lebensweg» ausnehmen könnte. Das tönt schon recht nach Soziologie oder vielleicht soziologischer Navigation. Wenn man davon ausgeht, dass jeder Lebensschritt auch durch Zufall oder Unplanmässiges mitgeformt wird, so könnten Richtungsänderungen als Zu-

fallssequenz aufgefasst werden. Je konsequenter man an der gegenwärtig eingeschlagenen Wanderrichtung festhält, desto kleiner ist die Streuung der Änderung. Interessant ist, dass dadurch zwar eine glattere Trajektorie entsteht, wo sie enden wird ist aber trotzdem nicht festgelegt, der Ausgang ist immer noch völlig arbiträr. Jeder Vermesser erkennt darin das Verhalten eines offenen Polygonzuges, ob er nach links oder rechts ausschert ist völlig zufällig und auch ohne systematische Effekte zu beobachten (Abb. 2).

Ebenso interessant ist die Feststellung, dass je zufallsgetriebener der Weg sich abzeichnet, umso bedeutungsloser wird das «Anfangsazimut» oder der Startwert. Und ein weiterer Einfluss kann schön gezeigt werden. Hat man ein Ziel, auch nur vage, im Visier, wird man sicher in die Richtung driften, wenn auch auf Umwegen. Nochmals: der Gang der Kurve sagt vorerst nichts über systematische Einflüsse aus, erst Korrelationsanalysen dürften da etwas Klarheit schaffen.

Worauf ich hinaus will: Es ist also Vorsicht bei der Interpretation von Resultaten geboten, insbesondere bei Zeitreihen, die inhärent, etwa durch Summation, korreliert sein können.

## Die Erde im Weltbild

Aber nicht nur die Unsicherheiten selbst machen einem die Messerei und Recherei schwer, sondern auch die Unsicherheiten der zugrunde gelegten Modelle oder vielmehr die Modellannahmen selbst können Ursache allerlei Ungemachs sein. Oftmals werden implizite Modellannahmen gemacht, ohne sich dessen bewusst zu sein. Die Lösung der, man könnte sagen, Uraufgabe der Geodäsie, die sich Erathostenes gestellt hatte, verwendet eine solche implizite Annahme, ohne die sich gar keine eindeutige Lösung herleiten liesse. Denn, ganz wesentlich ist die Annahme über die Entfernung der Erde von der Sonne. Lässt man die Vorgabe der unendlich fernen Distanz fallen, können beliebige Radien für die Erde aus Erathostenes' Daten berechnet werden.

Bei der Wahl des Abstandes zu etwa 6370 km strebt der Radius dem Unendlichen entgegen. Oder anders ausgedrückt: die Erde ist flach. Ein Weltbild, das die «Flat Earth Society» noch im 20sten Jahrhundert mit genau solchen vermeintlich wissenschaftlichen Beweisen zu stützen versuchte. Im Übrigen kann der Abstand zur Sonne noch kleiner gewählt werden, mit dem Resultat einer konkav gekrümmten Erdoberfläche, was wiederum die Existenz der Hohl Erde bewiese. Beim Malen von Weltbildern werden immer wieder Werkzeuge und Farben der Geodäsie verwendet. Allerdings nicht immer ohne im Streit endende Kontroversen auszulösen. Berühmt sind die Wissenschaftsquereen zwischen Newtonianern und Cassinianern in der ersten Hälfte des 18ten Jahrhunderts. Die von Jean-Dominique Cassini und seinem Sohne Jaques durchgeführten Gradmessungen widersprachen dem Newtonschen abgeplatteten Weltbild und deuteten eher auf ein hochgestelltes, an den Polen elongiertes Ellipsoid hin. An dieser Geschichte ist besonders bemerkenswert, dass die Diskussion sich zwar wie ein Glaubenskrieg darstellte, aber im Grunde genommen durch die verschiedenen Unsicherheiten genährt wurde. Zum einen waren die

theoretischen Vorgaben doch durch erhebliche Modellunsicherheiten verwässert, obwohl die Theorie recht schlüssig und mit einzelnen Beobachtungen, z. B. von Richer, bestätigt worden war. Zum anderen konnten Mess- und Methodenunsicherheiten nicht konsequent berechnet und ausgeräumt werden. Zum Beispiel blieben doch Zweifel über die Basis der Gradmessung im südlichen Teil bestehen, während der nördliche, bis Dunkerque reichende Ast später gemessen wurde. Delambre fand auch bei späteren Nachmessungen (1792-1798) auf einzelnen Dreiecksseiten 1 bis 3 Promille Differenzen, was die Diskussion über breitenabhängige Krümmungsradien obsolet erscheinen liesse, da diese Unsicherheiten eben keine Rückschlüsse auf Krümmungsdifferenzen innerhalb des betrachteten Bogenelementes auf Frankreichs Staatsgebiet zugelassen hätten. Gesucht waren die Meridian-Krümmungsradien, die vom Pol mit 6400 km bis zum Äquator mit 6335 km eine Differenz von 65 km aufweisen (etwa 1 %) (Abb. 4). Dies ist nicht zu verwechseln mit den Achsenlängen, die zwischen der Polachse (Kleine Halbachse) und der Äquator-Halbachse (Grosse Halbachse) um 21 km differieren. Für die Änderung des

Meridiankrümmungsradius über die Nord-Süd Ausdehnung Frankreichs von ca 8° bleibt noch etwa 9 km, was etwa 1.4 Promille des Radius selbst entspricht. Die einfache Formel

$$R = \frac{D}{\varphi}$$

gibt den gesuchten Radius  $R$ , falls die Bogenstrecke  $D$  auf der Erde und der entsprechende Zwischenwinkel  $\varphi$  gegeben oder vielmehr gemessen werden. Die Radien zweier Orte sind noch zu vergleichen, um auf die Krümmungsvariationen schliessen zu können. Mit den Unsicherheiten

$$\frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\frac{\sigma_D^2}{D^2} + \frac{\sigma_\varphi^2}{\varphi^2}} \text{ zufällig; } \frac{\delta_R}{R} = \frac{\delta_D}{D} - \frac{\delta_\varphi}{\varphi} \text{ systematisch}$$

und den eingangs gemachten Bemerkungen wird evident, dass die Distanz  $D$  doch mit Vorteil mit einer Unsicherheit etliches unter dem 1 Promille hätte bestimmt werden müssen, um verlässliche Aussagen über ein neues Weltbild postulieren zu dürfen. Trotzdem, die Messungen damals, das muss gesagt sein, setzten einen Meilenstein in der Technologie- und Methodenentwicklung der Geodäsie. Der Entscheid der französischen Wissenschaftsakademie, eine «südliche» Pe-

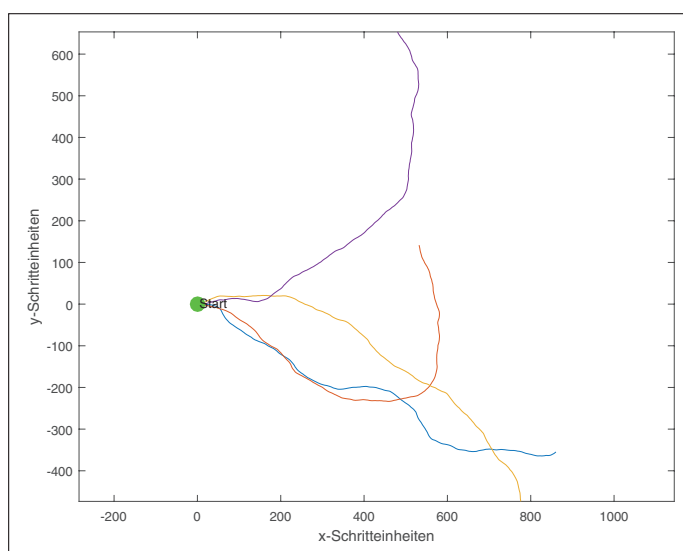


Abb. 2: Polygonzug. Der Schritt erfolgt mit einer gewissen Streuung (hier: 3°) in gleicher Richtung wie der vorherige. Vier Realisierungen (vier verschiedene Farben) mit gleicher Statistik und Start am grünen Punkt in gleicher Richtung (1000 Schritte).

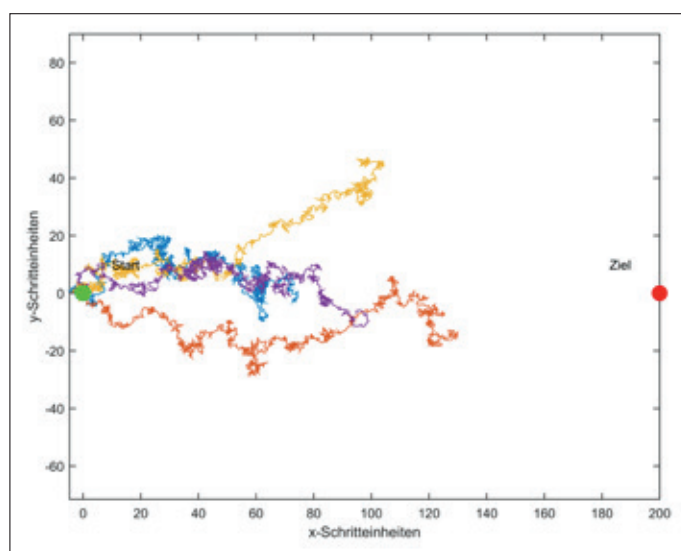


Abb. 3: Random walk. Vier Realisierungen (vier verschiedene Farben) mit gleicher Statistik wie in Abb. 1 und Start am grünen Punkt. Zusätzlicher Einfluss einer schwachen Zielvorgabe (roter Punkt) (1000 Schritte).

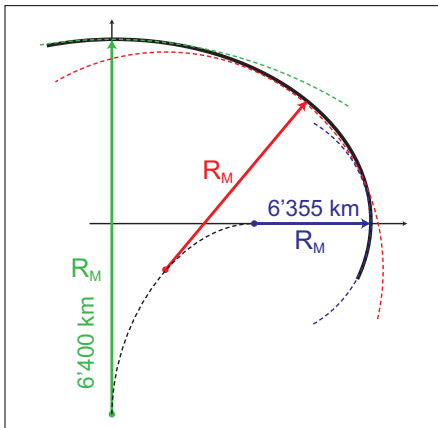


Abb. 4: Meridian-Krümmungsradien des Erdellipsoides sind Breiten abhängig.

ru-Expedition und eine «nördliche» Lappland-Expedition zu lancieren und durchzuführen, zielte, wissenschaftlich konsequent, genau auf die Messung von Modellbereichen, die im Vergleich zu den Messunsicherheiten genügend grosse Unterschiede in den zu bestimmenden Parametern zeigen. Der Zwist konnte denn auch schon allein durch die Lappland-Messungen 1737 beigelegt oder zu

Gunsten der Newtonianern entschieden werden (Levallois, 1988).

Cassinis Meridian von Paris hatte Anschlüsse an drei Basen und trotzdem können sich da Massstabsfehler eingeschlichen haben. Ähnliche Effekte wurden auch im ersten Schweizerischen Triangulationsnetz festgestellt, wo «Residual»-Lotabweichungen systematische Effekte im Basisvergrößerungsnetz und mithin dann einige ppm Massstabsfehler im südlichen Netzteil induzierten. Das Netz, ebenfalls mit drei Basen oder Grundlinien ausgestattet, war ein konzertierter Beitrag an die Europäische Gradmessung, etwa 160 Jahre nach den Cassinischen Anstrengungen (Gubler, 2011). Eine kleine Nebenbemerkung: Die Unsicherheiten haben sich in der Zeitspanne um etwa einen Faktor 0.95 pro Jahr oder sicher um einen Faktor 1/100 bis 1/1000 über diese gesamte Zwischenzeit verringert.

## Und die Erkenntnis daraus

Natürlich bleiben Fehlinterpretationen und Trugschlüsse nicht den früheren Ge-

nerationen vorbehalten. Ein guter Grund für die Geodäsie und Geomatik, sich weiterhin mit Unsicherheiten zu beschäftigen. Nur wer weiss, wie sicher das Unsichere und unsicher das Sichere ist, kann sich sicher im Unsicheren bewegen.

### Referenzen:

Levallois, J.J. (1988): Mesurer la terre, 300 ans de géodésie française Presses de l'école nationale des ponts et chaussées. France, p 389.

Gubler, E. (2011): 150 Jahre Schweizerische Geodätische Kommission. Geomatik Schweiz, 6/2011, 260-268.

Prof. Dr. Alain Geiger  
ETH Zürich  
Institut für Geodäsie und  
Photogrammetrie  
Robert-Gnehm-Weg 15  
CH-8093 Zürich  
alain.geiger@geod.baug.ethz.ch

Tour-Highlights sind die neuen unbemannten Flugsysteme (UAS) und die dazugehörigen Softwarelösungen: DatuGram™3D von Datumate und Trimble Business Center (TBC).

**„TRIMBLE UAS TOUR DE SUISSE“**  
Start am 03.11. an 10 Standorten in der Schweiz

**Neuheit 2015**

www.mebgroup.ch

Anmeldung und weitere Infos  
unter [www.allnav.com](http://www.allnav.com)